HUNGARICA ACTA MATHEMATICA

AUCTORITATE

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

EDIDIT

E. EGERVÁRY

VOL. I. NO. 4.

BUDAPESTINI

MCMXLIX

The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA are published by the *Hungarian Academy of Sciences* in Budapest and edited by Prof. E. Egerváry (Budapest).

The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA will be issued in fascicles not tied to any fixed dates; 6 fascicles will go to a volume. The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA are obtainable through all booksellers.

Manuscripts in a form ready for printing should be sent to Prof. E. Egerváry, Műegyetem rakpart 3., Budapest, XI. Only papers not published as yet elsewhere, written in English, French or German, and dealing with subjects belonging to the field of Mathematics or to neighbouring fields will be accepted for publication.

Of their papers to be published, authors will receive galley-proofs. Subsequent alterations of text, in so far as they exceed 10% of the typesetting cost, will be charged to the author.

Authors will receive 100 reprints of their papers free of cost.

THE ADMINISTRATION OF THE ACADEMY
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA, édités par *l'Académie Hongroise des Scienses* de Budapest, sont dirigées par E. Egerváry, professeur à l'Université de Budapest.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA apparaîssent, périodiquement; six fascicules forment un volume. HUNGARICA ACTA MATHEMATICA sont accessibles par chaque libraire.

Les manuscrits prêts à tirer en anglais, en français ou en allemand doivent être envoyés à M. E. Egerváry, professeur à l'Université de Budapest, Budapest, XI., Műegyetem rakpart 3.

Des oeuvres inédites du domaine des mathematiques et des sciences apparentées y seront admises.

Les auteurs reçoivent l'épreuve de leur ouvrage. Si les frais des changements ultérieurs du texte dépassent 10% des frais de composition, ils seront supportés par l'auteur.

Les auteurs reçoivent de leur ouvrage à titre gratuit 100 tirages.

L'ADMINISTRATION DE L'ACADÉMIE
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA werden durch die *Ungarische Akademie der Wissenschaften* in Budapest herausgegeben und von Prof. E. Egerváry (Budapest) redigiert.

Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA erscheinen zwangslos in Heften; 6 Hefte bilden einen Band. Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA sind durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Druckfertige Manuskripte sind an Prof. E. Egerváry, Budapest, IX., Műegyetem rakpart 3, zu senden. Aufgenommen werden Arbeiten in englischer, französicher oder deutscher Sprache aus dem Gebiet der Mathematik und aus den Nachbargebieten, die vorher nicht veröffentlicht wurden.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten eine Fahnenkorrektur. Nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 100 Sonderdrucke unentgeltlich.

DIE GESCHÄFTSFÜHRUNG DER AKADEMIE
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

A szerkesztésért Egerváry Jenő, a kiadásért Szent-Györgyi Albert felelős.

Szeged Városi Nyomda és Könyvkiadó Rt. Szeged, Kárász-u. 9. Felelős: Kiss István igazgató.

Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet.

Von O. VARGA in Debrecen.

Bekanntlich ist die Parallelübertragung eines Vektors im Riemannschen Raume im allgemeinen von der Bahnkurve abhängig. In Räumen, in denen es keine eindeutig parallelverschiebbaren Vektorräume gibt, gilt dies ausnahmslos[1]). Das Maximum, das man als Ersatz für eindeutig parallelverschiebbare Räume erhält, sind Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet. Ist nämlich ξ^i der Vektor jenes Feldes, dessen kovariante Ableitung

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk}(x)\,\xi^m$$

längs einer Kurve C verschwindet, so gilt, wenn x^i ein beliebiger Punkt von C und $x^i + dx^i$ ein beliebiger (d. h. nicht notwendig auf der Kurve gelegener) Nachbarpunkt ist

$$D\xi^i = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk}(x)\,\xi^m\right) dx^k = 0.$$

Dies besagt in der Tat, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen Kurvenpunktes alle Feldvektoren mit dem zum Kurvenpunkt gehörigen Vektor parallel sind. Im Folgenden soll eine einfache Konstruktion eines solchen Feldes angegeben werden.

Wir betten die Kurve C in ein Kurvengewebe

(1) $$x^i = x^i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

ein. Die Funktionen in (1) seien umkehrbar und differenzierbar, also

(2) $$t_i = t_i(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Die Kurve C sei durch

$$x^i = x^i(t_1, 0, \ldots, 0) \qquad 0 \leq t_1 \leq t$$

bestimmt.

---

[1]) Über solche Räume siehe etwa Duschek—Mayer: Lehrbuch der Differentialgeometrie. Leipzig und Berlin 1930, Bd. 2. insbes. S. 147—153.

Wir bestimmen den Vektor ξ^i aus dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\xi^i}{dt_1} = -\Gamma^i_{sl}(x(t_1, 0, \ldots, 0))\xi^s \frac{dx^l(t_1, 0, \ldots, 0)}{dt_1}$$

mit der willkürlichen Anfangsbedingung ξ^i_0 für $t = 0$. Die Lösung sei

$$\xi^i = \xi^i(t_1).$$

Aus dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\xi^i}{dt_2} = -\Gamma^i_{sl}(x(t_1, t_2, 0, \ldots, 0))\xi^s \frac{dx^l(t_1, t_2, 0, \ldots, 0)}{dt_2}$$

in dem t_1 die Rolle eines Parameters spielt, bestimmen wir den Lösungsvektor

$$\xi^i = \xi^i(t_1, t_2)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\xi^i(t_1, 0) = \xi^i(t_1).$$

Sind wir nach $k-1$ Schritten dieser Art zu einem Vektor

$$\xi^i = \xi^i(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})$$

gelangt, dann soll der Lösungsvektor $\xi^i(t_1, \ldots, t_k)$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\xi^i}{dt_k} = -\Gamma^i_{sl}(x(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0))\xi^s \frac{dx^l(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)}{dt_k}$$

das von den $t_1 \ldots t_{k-1}$ Parametern abhängt, der Anfangsbedingung

$$\xi^i(t_1, \ldots, t_{k-1}, 0) = \xi^i(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})$$

genügen. Das Verfahren sei bis $k = n$ fortgesetzt. Auf diese Weise erhalten wir den Feldvektor

(3) $$\xi^i = \xi^i(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Wegen (2) ist er auch eine Ortsfunktion

(3′) $$\xi^i = \xi^i(t_1(x), \ldots, t_n(x)) \equiv \xi^i(x)$$

im gegebenen Koordinatensystem. Wir behaupten, daß das durch (3′) definierte Vektorfeld die gewünschte Eigenschaft besitzt, d. h. seine kovariante Ableitung längs C verschwindet. Längs C ist

$$\xi^i = \xi^i(t_1, 0, \ldots, 0) = \xi^i(t_1(x), 0, \ldots, 0).$$

Daraus folgt schliesslich

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = \frac{\partial \xi^i(t_1, 0, \ldots, 0)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{mk}(x(t_1, 0, \ldots, 0))\xi^m$$

w. z. b. w.

Geometrisch bedeutet dieses Verfahren, entsprechend der Levi—Civitaschen Konstruktion der Parallelübertragung folgendes: Es wird in dem höherdimensionalen Euklidischen Raum, in welchem unsere Riemannsche Mannigfaltigkeit als Fläche erscheint, derselben längs der Kurve C eine Torse umschrieben. Die Torse samt der darauf befindlichen Kurve C wird nun abgewickelt. Ist C^* die abgewickelte Kurve, dann konstruieren wir längs C^* und in seiner Nachbbrschaft ein Feld von parallelen Vektoren. Durch Rückwickelung der Torse, wobei C^* mit C zur Deckung kommt, erhält man längs der Kurve und in seiner Nachbarschaft das gesuchte Vektorfeld.

Note on Approximation and Graduation by orthogonal Moments.[1])

By Charles Jordan.
Member of the Academy.

I. Approximation.

Given the values of $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ corresponding to $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$, an approximation by a parabola of degree n, $F = F(u)$ is required, such that according to the principle of least squares, the sum of the squares of the deviations $F(u) - y$ shall be a minimum; the values of the variable u being equidistant $u_{i+1} - u_i = h$.

---

[1]) This note is a summing up of the results obtained in my previous publications on the subject; it is a Resumé of my lecture held on November 17, 1947 at the Hungarian Academy of Sciences, The mentioned publications were:

1. Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés. Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 20; 1921.
2. Berechnung der Trendlinie auf Grund der Theorie der kleinsten Quadrate. Mitteilungen der Ungarischen Landeskommission für Wirtschafts-Statistik und Konjunkturforschung. No 1. 1930.
3. Sur la détermination de la tendance séculaire des grandeurs statistiques par la méthode des moindres carrés. Journal de la Société Hongroise de Statistique. Budapest 1929.
4. Approximation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polynomials. Annals of Mathematical Statistics. 1932, pp. 257—357. Ann Arbor, Michigan.
5. Calculus of Finite Differences, pp. 426—460. Budapest, 1939. Second edition (unchanged) New York 1947.

In the first paper, the required approximating function was given in its expansion into a series of orthogonal polynomials, hence a table of these was needed. In the subsequent papers the results were expanded into Newton series; moreover the orthogonal polynomials played a less and less prominent rôle, they were superseded by certain quantities Θ_m; proportional to the orthogonal moments of the observations. The computations became shorter and shorter, so that they reached the minimum; but it was still possible to simplify somewhat the theory, by choosing the constants of the orthogonal polynomials so as to make Θ_m equal to the orthogonal moments of the functions.

The shortest way to reach this is to introduce first a variable x by $x=(u-u_0)/h$ then x will take the values $0, 1, 2, \ldots, N-1$. Let us denote the approximating function by $f(x)$.

Secondly, to expand the function $f(x)$ into a series of orthogonal polynomials. The polynomial $U_m(x)=U_m$ of degree m will be termed orthogonal with respect to $x=0, 1, 2, \ldots, N-1$ if

$$\sum_{x=0}^{N} U_m U_n = 0 \quad (1)$$ [2]

for all values of m different from n.

The expansion of $f(x)$ may be written:

$$f(x)=a_0U_0+a_1U_1+\ldots+a_nU_n \quad (2)$$

where the coefficients a_m are to be determined so that $S=\sum_{x=0}^{N}[f(x)-y]^2$ be a minimum.

Putting $dS/da_m=0$ we get in consequence of orthogonality

$$\sum_{x=0}^{N} U_m y = a_m \sum_{x=0}^{N} U_m^2. \quad (3)$$

It follows that a_m is independant of the degree u of the function $f(x)$ This is important.

The first member is equal to Θ_m, the orthogonal moment of order m of the observations. This will be computed later. The values of U_m and ΣU_m^2 may be deduced starting from definition (1). [Loc. cit. 4. p. 273 and 5. p. 440.]

We find U_m given by its NEWTON expansion:

$$U_m(x)=C_m\sum_{\nu=0}^{m+1}(-1)^{m+\nu}\binom{m+\nu}{m}\binom{N-\nu-1}{m-\nu}\binom{x}{\nu} \quad (4)$$

where C_m is an arbitrary constant. The value attributed to C_m has no great importance, considering that in (2), a_mU_m is independent of C_m and therefore $f(x)$ too. Nevertheless we shall put to simplify our formulae:

$$C_m=1/(m+1)\binom{N}{m+1} \quad (5)$$

From (1) it follows moreover [Loc. cit. 4. p. 277 and 5. p. 442.] that

$$\sum_{x=0}^{N} U_m^2 = C_m^2\binom{2m}{m}\binom{N+m}{2m+1}. \quad (6)$$

To shorten the work of computation tables giving $\beta_{m\nu}$ [Loc.

[2]) In this paper, as in those quoted above, the upper limit is not included in the sum, in agreement with the theories of finite differences.

cit. 4. p. 280 and 5. p. 449.] and $C_{m\nu}$ [loc. cit. 4. p. 335—357.] may be used.

(7) $$\beta_{m\nu}=(-1)^{m+\nu}\binom{m+\nu}{m}\binom{m}{\nu}\frac{1}{\nu+1}$$

(8) $$C_{m\nu}=(-1)^{m+\nu}(2m+1)\binom{m+\nu}{m}\frac{\binom{N-\nu-1}{m-\nu}}{\binom{N+m}{m}}.$$

By aid of these values and (5), the expression (4) of the orthogonal polynomial will become

(9) $$U_m=\sum_{\nu=0}^{m+1}\beta_{m\nu}\frac{\binom{x}{\nu}}{\binom{N}{\nu+1}}$$

moreover from (6) we get:

(10) $$\sum_{x=0}^{N}U_m^2=\frac{1}{N|C_{m0}|}$$

and from (3),

(11) $$a_m=N|C_{m0}|\,\Theta_m.$$

Finally the approximating function (2) will be:

$$f(x)=N\sum_{m=0}^{n+1}|C_{m0}|\,\Theta_m\sum_{\nu=0}^{m+1}\beta_{m\nu}\frac{\binom{x}{\nu}}{\binom{N}{\nu+1}},$$

or since

$$C_{m\nu}=\beta_{m\nu}|C_{m0}|N\Big/\binom{N}{\nu+1}.$$

This formula may be useful if one is working beyond the ranges of the $C_{m\nu}$ tables.[3]) Finally

(12) $$f(x)=\sum_{m=0}^{n+1}\sum_{\nu=0}^{m+1}C_{m\nu}\,\Theta_m\binom{x}{\nu}.$$

Thus, the approximating function is easily obtained, in its most favourable form (NEWTON expansion); only the computation of the orthogonal moments $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_n$ is needed.

From (12) we get immediately

$$\Delta^\nu f(0)=\sum_{m=\nu}^{n+1}C_{m\nu}\Theta_m$$

[3]) This does not occur often enough to justify the amount of work needed for the extension of the $C_{m\nu}$ tables mentioned; but perhaps it would be advaisable to prolonge the C_{m0} tables, so that $C_{m\nu}$ could be determined by the formula above. If the C_{m0} table is not available, then before using the formula (12), $C_{m\nu}$ must be computed by (8).

and the approximating function will be

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{x}{\nu}\Delta^{\nu}f(0).$$

Starting from the differences $\Delta^{\nu}f(0)$, a table of the approximate values $f(x)$ and of their differences may be computed, by the method of the addition of differences. If $f(x)$ is of degree n then $\Delta^{n}f(x)$ is a constant. Into the first line of a table the following numbers are written:

$$\Delta^{n}f(0),\quad \Delta^{n-1}f(0),\ldots,\Delta f(0),\quad f(0)$$

moreover into the first column, the numbers

$$\Delta^{n}f(0)\quad \Delta^{n}f(1)\quad \Delta^{n}f(2)\ldots$$

since $\Delta^{n}f(x)$ is constant, these numbers will be all equal. In the rest of the table, each number shall be equal to the sum of the number above it, and that which preceeds the latter in its line. Hence

$$\Delta^{m-1}f(x)=\Delta^{m-1}f(x-1)+\Delta^{m}f(x-1).$$

This equation follows directely from the definition of the differences. The last column will contain the approximate values, the column last but one, their first differences, and so on.

The measure of the obtained precision is given by

$$\sigma_n^2=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N}[f(x)-y]^2=\frac{1}{N}\left[\sum_{x=0}^{N}y^2+\sum_{x=0}^{N}\sum_{m=0}^{n+1}a_m^2U_m^2-2\sum_{x=0}^{N}\sum_{m=0}^{n+1}a_mU_my\right]$$

and in consequence of (3), (10) and (11)

$$\sigma_n^2=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N}y^2-\sum_{m=0}^{n+1}|C_{m0}|\,\Theta_m^2. \tag{13}$$

Therefore, to determine σ_n^2, besides the orthogonal moments, the computation of Σy^2 is necessary.

Should the obtained precision be insufficient, we have only to compute Θ_{n+1} and use formulae (12) and (13), the work previously done would not be lost, as it would be working by other methods.

3. Computation of the orthogonal moments. First the binomial moments $B_0, B_1, \ldots, B_n$ are to be determined

$$B_m=\sum_{x=0}^{N}\binom{x}{m}y.$$

The shortest is to use Hardy's somewhat modified method. A table is drawn in the following way: In the first line we put $y(N-1)$ and $n+1$ zeros. In the ξ-th line of the first column the number $y(N-\xi)$. Starting from these initial conditions, we determine the number $f(\xi,\eta)$

of line ξ and column η, by aid of the equation of partial differences:

(14) $$f(\xi, \eta) = f(\xi-1, \eta-1) + f(\xi-1, \eta).$$

Let us remark that the binomial coefficients satisfy the same equation.

This equation may be resolved by Laplace's method of generating functions, [Loc. cit. 4. p. 286 and 5. pp. 607—616.] starting from the initial conditions:

$$f(1, \eta) = 0 \text{ if } \eta \neq 1 \quad \text{and} \quad f(1, 1) = y(N-1)$$
$$f(\xi, 1) = y(N-\xi)$$

the result will be

$$f(\xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^{\xi} \binom{\xi-\nu-1}{\eta-2} y(N-\nu)$$

this will give for $\xi = N+1$

$$f(N+1, \eta) = \sum_{\nu=1}^{N+1} \binom{N-\nu}{\eta-2} y(N-\nu) = B_{\eta-2}.$$

That is the row $N+1$ will contain the binomial moments $B_0, B_1, \ldots, B_n$; the moment B_m will be in column $m+2$.

In this way we obtain at the same time, without any multiplications, by simple additions, every binomial moment needed.

If N is large the moments grow rapidly with their order and become very large numbers; this being an inconvenience, to obviate it we introduce the mean binomial moments by [Loc. cit. 4. 279]

$$T_m = \sum_{x=0}^{N} \binom{x}{m} y \Big/ \binom{N}{m+1} = B_m \Big/ \binom{N}{m+1}$$

these are always of the same order of magnitude as y, whatever the order m may be.

Multipliing (9) by y, and summing from $x=0$ to $x=N$ we get

(15) $$\Theta_m = \sum_{\nu=0}^{m+1} \beta_{m\nu} T_\nu.$$

The orthogonal moments are determined by this equation.

Summing up, the only real work to do is the computation of the binomial moments given above.

Starting from (12) we get by the method of the addition of differences [Loc. cit. 4. p. 290 and 5. p. 76.] a table of the approximating values $f(x)$ and of their first n differences.

II. GRADUATION.

A graduated value of y_m will be obtained by aid of a parabola of the n-th degree approximating the $2k+1$ points: $u_{m-k}, y_{m-k}, \ldots, u_{m+k}, y_{m+k}$ according to the principle of least squares. The ordinate of the parabola corresponding to u_m will be the required value. The equation of the parabola is not needed.

Introducing the variable $x=(u-u_{m-k})/h$ it will vary from zero to $N=2k+1$, and the approximating value will correspond to $x=k$, given by (2)

$$f(k)=\sum_{m=0}^{n+1} a_m U_m(k).$$

$U_m(k)$ is the *central* value of the orthogonal polynomial. It can be shown that [Loc. cit. 4. p. 318, 319 and 5. p. 457, 458.]

$$(16) \qquad U_{2m+1}(k)=0 \qquad U_{2m}(k)=C_{2m}(-1)^m \binom{2m}{m}\binom{k+m}{2m}.$$

Let us put $a_{2m}U_{2m}(k)=\gamma_{2m}\Theta_{2m}$, then we have

$$f(k)=\sum_{m=0}^{n+1}\gamma_{2m}\Theta_{2m}$$

where

$$\gamma_{2m}=(-1)^m(4m+1)\binom{2m}{m}\binom{k+m}{2m}\bigg/\binom{2k+1+2m}{2m}.$$

To shorten the determination of $f(k)$ a table has been computed giving γ_{2m} sufficient up to parabolas of the tenth degree. [Loc. cit. 4. p. 321 and 5. p. 459.]

In consequence of (16), graduation by parabolas of odd degree is useless, since the parabola of degree $2n+1$ gives the same value, as that of degree $2n$.

Remark. The method cannot be applied if $m<k$, or if $m>N-1-k$. The statisticians generally don't graduate in these cases; it would be possible to proceed for the first k points as follows: To determine a function $f(x)$ approximating the first $2k+1$ points, by the method of section I, and to accept $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$ as roughly graduated values of $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$. In the case of the last k points, the same proceeding could be applied.

Darstellung algebraischer Flächen von Gestalt einer Kurve.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

(Eingegangen am 15. Februar 1948.)

1. Stellt die Gleichung

(1) $$f(x, y)=0$$

eine reelle algebraische Kurve dar, so bilden die Punkte $P=(x, y)$ für welche

(2) $$f^2(x, y)-\varepsilon^2 \leqq 0, \qquad \varepsilon>0$$

ist, einen von den Kurven

(3) $$f(x, y)-\varepsilon=0 \quad \text{und} \quad f(x, y)+\varepsilon=0$$

begrenzten (zusammenhängenden oder aus zusammenhängenden Teilen bestehenden) Bereich B.

Ist ε genügend klein, so stellt die Gleichung

(4) $$z^2+f^2(x, y)-\varepsilon^2=0$$

in rechtwinkligen Koordinaten eine algebraische Fläche von der Gestalt der algebraischen Kurve (1) dar. Diese Fläche liegt zwischen den Ebenen $z=\varepsilon$ und $z=-\varepsilon$ und wird von diesen Ebenen in je einer Kurve von der Gleichung (1) berührt. Der unendlichferne Punkt Z der z-Achse ist ein mehrfacher Punkt der Fläche (4) und zwar ein $2n-2$-facher Punkt, wenn die Kurve (1) die Ordnung n besitzt. Eine zur xy-Koordinatenebene senkrechte Gerade g hat mit der Fläche dann und nur dann reelle und von der xy-Ebene im endlichen Abstand liegende Punkte gemeinsam, wenn der Fußpunkt P der Geraden g in den Bereich B fällt. Die Fläche (4) kann außerhalb von Z nur auf der xy-Ebene einen singulären Punkt besitzen und zwar in den eventuellen singulären Punkten der Kurven (3).

Die Fläche (4) schrumpft in die Kurve (1) zusammen, falls $\varepsilon \to 0$.

Hat die Gleichung (1) die Form

(5) $$f(x, y) \equiv y-\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, so wird die Fläche

(4) von einem Kreis K mit dem Halbmesser ε beschrieben, dessen Ebene zu der yz-Koordinatenebene parallel ist und dessen Mittelpunkt die Kurve (5) beschreibt.

2. Eine reelle algebraische Raumkurve läßt sich durch Gleichungen von der Form

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad z = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \tag{6}$$

darstellen, wo $f(x, y)$, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ Polynome mit reellen Koeffizienten bedeuten und die Polynome $g(x, y)$ und $h(x, y)$ keinen gemeinsamen Teiler haben.

Fällt ein gemeinsamer Punkt P der Kurven $g(x, y) = 0$ und $h(x, y) = 0$ auf den Rand des Bereiches B, so ist die zur z-Achse parallele Gerade durch P für die reelle algebraische Fläche von der Gleichung

$$[z \cdot h(x, y) - g(x, y)]^2 + f^2(x, y) - \varepsilon^2 = 0, \qquad \varepsilon > 0 \tag{7}$$

eine isolierte Doppelgerade. Ist ε genügend klein, so besitzt die Fläche (7) die Gestalt der Raumkurve (6).

Eine zur z-Achse parallele Gerade g hat mit der Fläche (7) außerhalb von Z dann und nur dann reelle Punkte gemeinsam, wenn sie durch einen Punkt des Bereiches B geht.

Die Fläche schrumpft in die Raumkurve zusammen, falls $\varepsilon \to 0$.

Wir haben in einer Arbeit[1]) ein Verfahren gegeben, wodurch man zu einer gegebenen algebraischen ebenen Kurve (1) die andere Gleichung einer algebraischen Raumkurve (6) darstellen kann, wenn die Raumkurve beliebig verknotet und verkettet ist. Daraus folgt, daß es reelle algebraische Flächen mit beliebigen Verknotungen und Verkettungen gibt.

Ist ε genügend klein, so stellt z. B.[2]) die Gleichung

$$[z(x^2 + y^2 - 1) - xy]^2 + [x^4 + (y^2 - 1)^2 - 4x^2]^2 - \varepsilon^2 = 0 \tag{8}$$

eine aus zwei Schalen bestehende irreduzible algebraische Fläche 8-ter Ordnung dar, deren Schalen einander einmal ketten.

3. Die gegebenen Methoden lassen sich für die Darstellung von Flächen mit der Gestalt einer Kurve offenbar auch dann anwenden, wenn die ebene bzw. Raumkurve (1) bzw. (6) nicht algebraisch ist.

Die Gleichung

$$z^2 + (y - \sin x)^2 - \varepsilon^2 = 0$$

stellt z. B. eine reelle Fläche dar, welche die Gestalt der Sinuskurve besitzt, falls ε genügend klein ist.

---

1) Gy. (J.) v. Sz. Nagy, Über die algebraische Darstellung der verknoteten und verketteten algebraischen Raumkurven, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung* **25** (1919), S. 285–293.

2) A. a. O., S. 292 | 293.

Über rationale Funktionen, deren Nullstellen und Pole an entgegengesetzten Seiten einer Geraden liegen.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

(Eingegangen am 15. Február 1948.)

1. Es gilt der Satz:

I. *Liegen die Nullstellen der Polynome*

(1) $f(z)=(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_m)$ *bzw.* $g(z)=(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)$ *an der einen bzw. an der anderen Seite einer Geraden g durch die Punkte* α *und* β, *und sind*

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)},\quad 0<\operatorname{arc}\frac{\beta-a_1}{\alpha-a_1}<\pi,\quad 0<\omega=\operatorname{arc}\frac{F(\beta)}{F(\alpha)}\leq 2\pi, \tag{2}$$

so enthält das Kreiszweieck $K\left(\alpha,\beta;\frac{\omega}{m+n}\right)$, *von dessen Randpunkten aus die Strecke* (α,β) *unter dem Winkel* $\frac{\omega}{m+n}$ *erscheint, entweder mindestens eine der* $m+n$ *Nullstellen der Polynome* $f(z)$ *und* $g(z)$ *im Innern oder jede dieser Nullstellen am Rande.*

Bestände die erste Ungleichung in (2) nicht, so verwechselt man die Punkte α und β miteinander. Während ein Punkt z die Gerade g in der Richtung des Vektors $\overrightarrow{\alpha\beta}$ beschreibt, nehmen die Funktionen

$$\varphi_h(z)=\operatorname{arc}(z-a_h)\ \text{und}\ \psi_k(z)=-\operatorname{arc}(z-b_k) \tag{3}$$
$$(h=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n)$$

offenbar von Null ausgehend bis π stetig und monoton zu. Die Funktion

$$\Phi(z)=\operatorname{arc}F(z)=\sum_{h=1}^{m}\operatorname{arc}(z-a_h)-\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc}(z-b_k)= \tag{4}$$
$$=\sum_{h=1}^{m}\varphi_h(z)+\sum_{k=1}^{n}\psi_k(z)$$

ist also eine monoton zunehmende Funktion von z auf der Geraden g. Es gilt also die Gleichung

$$(5)\qquad \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\sum_{h=1}^{m}[\varphi_h(\beta)-\varphi_h(\alpha)]+\sum_{k=1}^{n}[\psi_k(\beta)-\psi_k(\alpha)]=\omega+2p\pi,$$

wo p eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Wäre nun kein Punkt a_h oder b_k im Innern des Kreiszweieckes $K\left(\alpha, \beta; \frac{\omega}{m+n}\right)$ gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$(6)\qquad 0<\varphi_h(\beta)-\varphi_h(\alpha)\leqq\frac{\omega}{m+n},\quad 0<\psi_k(\beta)-\psi_k(\alpha)\leqq\frac{\omega}{m+n}$$

$$(h=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

und

$$0<\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\leqq\omega.$$

In dieser Ungleichung kann das Gleichungszeichen nur dann bestehen, wenn die Ungleichungen (6) mit Gleichheitszeichen bestehen.

Damit ist der Satz I bewiesen.

Aus dem Beweis dem Satzes I folgt der Satz

II. *Sind die Nullstellen der Polynome* (1) *von einer Geraden durch die Punkte* α *und* β $(\beta\neq\alpha)$ *getrennt und liegen sie außerhalb des Kreiszweiecks* $K\left(\alpha, \beta; \frac{2\pi}{m+n}\right)$, *so ist*

$$F(\beta)=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}\neq F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

Nach der Annahme des Satzes ist $f(\alpha)\ f(\beta)\ g(\alpha)\ g(\beta)\neq 0$. Besteht die erste Ungleichung von (2) und ist

$$F(\beta)=e^{i\varphi}F(\alpha)\quad(0<\varphi\leqq 2\pi),$$

so ist

$$\varphi=\operatorname{arc}\frac{F(\beta)}{F(\alpha)}=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)<(m+n)\frac{2\pi}{m+n}=2\pi.$$

Damit ist der Satz II bewiesen. Daraus folgt der Satz

III. *Enthält der Parallelstreifen* S *von der Breite* $2d$ *und mit der Mittelgeraden* g *keine Nullstelle der Polynome* (1) *und trennt die Gerade* g *die Punkte* a_h *von den Punkten* b_k *ab, so nimmt die rationale Funktion* $F(z)$ *in* (2) *auf einer beliebigen Strecke von* g, *deren Länge kleiner als* $d\operatorname{tg}\frac{2\pi}{m+n}$ *ist, irgendeinen Wert höchstens einmal an.*

Das Kreiszweieck $K\left(\alpha, \beta; \frac{2\pi}{m+n}\right)$ liegt nämlich ganz im Parallelstreifen S, falls $|\beta-\alpha|<2d$ ist.

2. Die Sätze I—III lassen sich auf den Fall $g(z)=\bar{f}(z)$ $(b_k=\bar{a}_k,$ $n=m)$ anwenden, wenn jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ oberhalb der reellen Achse liegt.

In diesem Fall gilt auch der Satz

IV. *Sind*

(7) $f(z)=(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_m)$;

$$a_k=x_k+iy_k,\quad x_1\leqq x_2\leqq\dots\leqq x_m,\quad \operatorname{Min} y_k\geqq y_0>0$$

$(k=1,2,\dots,m)$ *und*

(8) $$F(z)=\frac{f(z)}{\bar f(z)}=\frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_m)}{(z-\bar a_1)(z-\bar a_2)\dots(z-\bar a_m)},\quad \bar a_k=x_k-iy_k,$$

so sind die $2(m-1)$ *Nullstellen der Derivierten* $F'(z)$ *paarweise konjugiert imaginär. Ist* $\zeta=\xi+i\eta$ $(\eta>0)$ *eine Nullstelle von* $F'(z)$ *und ist* $F(\zeta)\neq 0$, *so bestehen die Ungleichungen*

(9) $$x_1\leqq\xi\leqq x_m \quad\text{und}\quad \eta\geqq y_0.$$

Das Gleichheitszeichen kann in der ersten bzw. zweiten Ungleichung nur dann bestehen, wenn $x_1=x_2=\dots=x_m$ *bzw.* $a_1=a_2=\dots=a_m$ *sind.*

Bezeichnet H_k *die gleichseitige Hyperbel mit der Hauptachse* $(a_k, \bar a_k)$ *und ist* ζ *kein gemeinsamer Punkt der* m *Hyperbeln* H_k, *so liegt der Punkt* ζ *auf der inneren Seite einer Hyperbel und auf der äußeren Seite einer anderen Hyperbel.* (Die innere bzw. äußere Seite einer Hyperbel ist die Menge der Punkte, die an die Hyperbel keine bzw. zwei reelle Tangenten senden.) *Der Durchschnitt der äußeren Seiten der Hyperbeln* H_k $(k=1,2,\dots,m)$ *enthält also jede Nullstelle der Derivierten* $F'(z)$ *im Innern oder am Rande.*

Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ *außerhalb der Ellipse*

(10) $$E(x,y)=(x-\alpha)^2+2y^2-2\beta^2=0 \qquad (\alpha=\bar\alpha,\ \beta=\bar\beta\neq 0),$$

so enthält die Kreisscheibe

(11) $$K(x,y)=(x-\alpha)^2+y^2-\beta^2\leqq 0$$

jede Nullstelle der Derivierten $F'(z)$.

Man erhält aus (7) und (8) die Formel

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\bar f'(z)}{\bar f(z)}=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{z-a_k}-\frac{1}{z-\bar a_k}\right]=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k-\bar a_k}{(z-a_k)(z-\bar a_k)}=$$

$$=2i\sum_{k=1}^{m}\frac{y_k}{(x-x_k)^2-y^2+y_k^2+2iy(x-x_k)}.$$

Sind $F'(\zeta)=0$, $F(\zeta)\neq 0$, $\zeta=\xi+i\eta$, so sind

(12) $$\frac{1}{2}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}=A+iB=0,$$

(13) $$A\equiv 2\eta\sum_{k=1}^{m}C_k(\xi-x_k)=0,\quad B\equiv\sum_{k=1}^{m}C_k[(\xi-x_k)^2+y_k^2-\eta^2]=0,$$
$$C_k\equiv\frac{y_k}{[(\xi-x_k)^2+y_k^2-\eta^2]^2+4\eta^2(\xi-x_k)^2}\quad (k=1,2,\dots,m).$$

Aus den Gleichungen $A=0$ und $B=0$ folgen die Ungleichungen (9) einfach.

Die Hyperbel H_k hat die Gleichung

$$H_k(x, y) \equiv (x-x_k)^2 - y^2 + y_k^2 = 0. \tag{14}$$

Die Annahme, daß der zweite Absatz von IV unrichtig ist, führt offenbar zum Widerspruch $B \neq 0$.

Der Mittelpunkt des Kreises (11) liegt auf der äußeren Seite jeder Hyperbel H_k $(k=1, 2, \ldots, m)$. Dies gilt auch für jeden Punkt der Kreisscheibe, weil der Kreis mit der Hyperbel H_k keinen reellen Punkt gemeinsam hat. Die Abszissen ihrer gemeinsamen Punkte genügen der Gleichung.

$$(x-\alpha)^2 + (x-x_k)^2 + y_k^2 - \beta^2 \equiv 2x^2 - 2x(x_k+\alpha) + x_k^2 + y_k^2 + \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat aber keine reelle Wurzel, weil

$$(x_k+\alpha)^2 - 2(x_k^2 + y_k^2 + \alpha^2 - \beta^2) \equiv -E(x_k, y_k) < 0$$

ist. Die Nullstelle $a_k = x_k + iy_k$ liegt nämlich nach der Annahme des dritten Absatzes von IV außerhalb der Ellipse (10).

Damit ist der Satz IV bewiesen, weil die Kreisscheibe (11) auf der äußeren Seite sämtlicher Hyperbeln H_k liegt und deshalb keine Nullstelle von $F'(z)$ enthalten kann (zweiter Absatz von IV).

3. Bezeichnet λ eine beliebige reelle Zahl, so erhält man aus (13) die Gleichung

$$\frac{(\lambda-\xi)}{\eta} A + B \equiv \sum_{k=1}^{m} C_k[(x_k-\lambda)^2 + y_k^2 - r^2] = 0, \quad r^2 \equiv (\xi-\lambda)^2 + \eta^2. \tag{15}$$

Daraus folgt der Satz

V. *Jeder in bezug auf die reelle Achse symmetrisch liegende Kreis K, der durch eine Nullstelle $\zeta = \xi + i\eta$ der Derivierten der gebrochenen rationalen Funktion*

$$F(z) = \frac{f(z)}{\bar{f}(z)}, \quad f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m), \quad a_k = x_k + iy_k, \quad y_k > 0,$$

geht, trennt die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ [oder $\bar{f}(z)$], falls $f(\zeta) \neq 0$ ist. (Enthält nämlich der Kreis K nicht jede Nullstelle von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ mindestens je eine Nullstelle innerhalb und außerhalb von K).

Die obere Halbebene läßt sich — wie bekannt — als eine hyperbolische Ebene betrachtet werden, deren Grenzgerade die reelle Achse ist. Die Gesamtheit der auf die Grenzgerade senkrechten Halbgeraden und Halbkreise der oberen Halbebene bildet die Gesamtheit der Geraden der hyperbolischen Ebene.

Aus dem Satz V folgt also die folgende Verallgemeinerung des bekannten Gauss—Lucasschen Satzes:

VI. *Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ oberhalb der reellen Achse und ist $F(z)=f(z):\bar{f}(z)$, so enthält die hyperbolische konvexe Hülle der Nullstellen der rationalen Funktion $F(z)$ in der hyperbolischen Ebene E, deren Grenzgerade die reelle Achse ist, jede in E liegende Nullstelle der Derivierten $F'(z)$.*

Dieser Satz folgt durch eine lineare Transformation aus dem folgenden Satz[1]) von J. L. WALSH:

Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ m-ten Grades innerhalb eines Kreises K, bezeichnet ferner $f^*(z)$ das Polynom m-ten Grades, dessen Nullstellen Spiegelbilder der Nullstellen von $f(z)$ am Kreise K sind und ist K der Grenzkreis einer hyperbolischen Ebene, so enthält die (hyperbolische) konvexe Hülle der Nullstellen der Funktion $F(z)=f(z):f^*(z)$ jede in dieser hyperbolischen Ebene (innerhalb von K) liegende Nullstelle der Derivierten $F'(z)$.

Dieser Satz wurde von J. L. WALSH auf eine andere Weise bewiesen, als der Satz VI bei uns. Umgekehrt: dieser Satz von WALSH folgt aus dem Satz VI durch eine geeignete lineare Transformation.

---

[1]) J. L. WALSH, Note on the location of zeros of the derivative of a rational function whose zeros and poles are symmetric in a circle, *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), p. 462—470.

Some remarks on independent random variables.

By ALFRÉD RÉNYI in Budapest.

Let us consider a sequence of independent random variables $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ having the same distribution function $F(x)$, with the mean value 0,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = 0 \tag{1}$$

and the finite dispersion σ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) = \sigma^2. \tag{2}$$

Let us put

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{3}$$

and let $F_n(x)$ denote the distribution function of S_n. It is well known[1]) that $F_{n+1}(x)$ is the convolution of $F_n(x)$ and $F(x)$, i. e.

$$F_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-v)\,dF(v). \tag{4}$$

In this case of "equal components" the central limit theorem is valid without any further supposition[2]), i. e. we have

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x\sigma\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}.\,dt \tag{5}$$

for any fixed value of x. But the central limit theorem does not furnish any evidence regarding the asymptotic properties of $F_n(x\sigma\sqrt{n})$ if $|x|$ tends to ∞ together with n. Some information in this direction may be obtained from Liapounoff's theorem[3]) but only for the range of values $|X| = O(\sqrt{\log n})$. Considerably stronger results have been obtained by H. CRAMÉR[4]). One of his results[5]) is — under some additional conditions — valid for $|x| < c\sqrt{n}$, with some constant c. Evidently in general this is the maximal order of magnitude for which the problem has a sense, because if the random variables X_n are bounded, we have $S_n = O(n)$, and thus $F_n(x\sigma\sqrt{n}) = 1$ for $x > \lambda\sqrt{n}$ and $F_n(x\sigma\sqrt{n}) = 0$ for $x < -\lambda\sqrt{n}$, with some constant value of λ. In what follows we are concerned instead of the rather deep asymptotic laws with the more elementary question of estimating the value of constant λ, mentioned above, using only some particular data of $F(x)$.

Let ξ denote a bounded random variable, $F(x)$ its distribution function, let B denote the least number having the property that $F(x) = 1$ for $x > B$. Similarly let A denote the greatest number with the property that $F(x) = 0$ for $x < A$. Evidently B (resp. A) can also be defined as the least (resp. greatest) number for which the probability of $\xi > B$ (resp. of $\xi < A$) is equal to 0. We shall call B the probable least upper bound (*PLUB*) and A the probable greatest lower bound (*PGLB*) of ξ.

We start by proving the following

Lemma. Let $F(x)$ denote the distribution function of the bounded random variable ξ. Let us denote

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x). \tag{6}$$

We suppose $m_1 = 0$, further we put

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)dt. \tag{7}$$

If B and A denote the *PLUB* and *PGLB* of ξ, we have for any $k = 1, 2, \ldots$

$$B^{2k-1} - A^{2k-1} \geq \frac{m_{2k}}{\Phi(0)}. \tag{8}$$

Proof: It follows by partial integration, owing to $m_1 = 0$,

$$\Phi(B) = \int_A^B F(x)dx = [xF(x)]_A^B - \int_A^B x dF(x) = B. \tag{9}$$

Using (9) and applying partial integration twice, we obtain

$$m_{2k} = -(2k-1)B^{2k} + 2k(2k-1)\int_A^B x^{2k-2}\Phi(x)\,dx. \tag{10}$$

Owing to the fact, that the function $\Phi(x)$ is convex from below, we have

$$\begin{aligned} &\Phi(x) \leq -\frac{(x-A)\,\Phi(0)}{A} \quad \text{for} \quad A \leq x \leq 0 \\ &\Phi(x) \leq \Phi(0) + x\left(1 - \frac{\Phi(0)}{B}\right) \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq B. \end{aligned} \tag{11}$$

Applying the inequalities (11) we obtain from (10) the inequality (8). In what follows we shall use this Lemma only in the special case $k = 1$.

In this case we have evidently

$$B-A \geqq \frac{\sigma^2}{\Phi(0)}. \tag{12}$$

Owing to the convexity of $\Phi(x)$ we have $\Phi(0) \leqq \frac{-AB}{B-A}$ and thus it follows:

$$-AB \geqq \sigma^2. \tag{13}$$

As the arithmetic mean is greater than the geometric, we obtain the less precise inequality, (which has the advantage that it contains only σ),

$$B-A \geqq 2\sigma. \tag{14}$$

This is equivalent to a theorem proved first by J. L. WALSH[6]), an other proof has been given by A. HAAR[7]). Thus our lemma may be regarded as a sharpening of the result of WALSH. Now we prove the following

Theorem. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ denote independent random variables, all having the same distribution function $F(x)$, having the mean value 0 and dispersion σ. We put $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ and denote the *PLUB* of $|S_n|$ by M_n. Then it follows

$$M_n \geqq \frac{n\sigma^2}{2\Phi(0)}. \tag{15}$$

This theorem follows without any difficulty from (12), using the fact, that if B_n and A_n denote the *PLUB* and *PGLB* of S_n, we have by (4) $B_n = nB$ and $A_n = nA$, further we have $M_n = \operatorname{Max}(B_n, |A_n|)$. We have remarked above, that (14) is feebler than (12). Though actually we have deduced (14) from (12), this alone does not prove our assertion*), which has to be proved separately. As a matter of fact we have only to show, that

$$\sigma \geqq 2\Phi(0). \tag{16}$$

This can be proved as follows: We have by the inequality of SCHWARZ (for STIELTJES integrals)

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} x\,dF(x) \leqq \left(\int_{-\infty}^{0} x^2 dF(x) \cdot \int_{-\infty}^{0} dF(x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

Similarly, owing to $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = 0$ we have

$$\Phi(0) = \int_{0}^{\infty} x\,dF(x) \leqq \left(\int_{0}^{\infty} x^2 dF(x) \cdot \int_{0}^{\infty} dF(x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

*) As a matter of fact, from $a \geqq b$ and $b \geqq \frac{c}{a}$ it follows $a \geqq \sqrt{c}$ but this does not imply $b \geqq \sqrt{c}$ (e. g. in the case $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$).

Adding (17) and (18) and applying the inequality

$$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$$

we obtain (16).

Our theorem can be generalized for the case of unequal components, without any essential difficulty, the formulation of the corresponding theorem may be left to the reader. We mention that (15) is a "best possible" result, as there is equality in (15) for instance in the case of the binomial distribution.

An interesting application of our Theorem is the following: Let $1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ denote an orthonormal system of functions in the interval (0, 1). It is an often used evident fact, that

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| \geq \sqrt{2} \tag{19}$$

for any pair of indices $i \neq j$. Let us suppose in addition, that the functions $\varphi_n(x)$ are pairwise (stochastically) independent[8], (as for instance the functions of the WALSH-system). It follows easily from (15) for $n=2$, combined with (16) that in this case we have

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| \geq 2. \tag{20}$$

This inequality is exact, as for instance there is equality in (20) for any pair of functions of the WALSH-system.

REFERENCES:

1) H. CRAMÉR, Mathematical Methods of Statistics, *Princeton, University Press*, 1946, p. 190.

2) ibidem p. 215.

3) H. CRAMÉR, Random variables and probability distributions, *Cambridge University Press*, 1937, p. 77.

4) H. CRAMÉR, Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, No. 736, Paris, Hermann & C[ie], 1938, pp. 5—23.

5) ibidem, Théorème 6, p. 20.

6) J. L. WALSH, A property of Haar's system of orthogonal functions, *Math. Annalen*, Vol. 90, 1923, p. 39.

7) A. HAAR, Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift*, Vol. 31, 1930, p. 132.

8) For the definition see e. g. M. KAC, Sur les fonctions indépendantes I, *Studia Math.*, 6, 1936, pp. 46—58.

Kurven auf Hyperflächen im Finslerschen Raume[1]).

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

Im n-dimensionalen Finslerschen Raum betrachten wir eine beliebige, auf einer Hyperfläche gelegene Kurve. Eine solche Kurve besitzt als Raumkurve aufgefaßt $n-1$ Invarianten, als Hyperflächenkurve $n-2$ Invarianten. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen diesen beiden Serien von Invarianten aufgestellt. In diesem Zusammenhange ergibt sich ferner eine auch an und für sich interessante Formel, die als weitgehende Verallgemeinerung der Darbouxsche Relationen, für die Bewegung des begleitenden Dreibeins einer Fläche aufgefaßt werden kann. Die hier gegebenen Resultate enthalten natürlich auch denjenigen — unseres Wissens nach noch nicht gelösten — Specialfall der Hyperflächen eines eukliedischen Raumes.

I.

Im Finslerschen Raum F_n[2]) sei eine Kurve auf einer Hyperfläche[3]) durch die Parameterdarstellung

$$y^\alpha = y^\alpha[x^1(s), \ldots, x^{n-1}(s)] \tag{1}$$

festgelegt. (y^α bezeichen die Raum —, x^i die Flächenkoordinaten. Die griechischen Buchstaben laufen von 1 bis n, die lateinischen von 1 bis $n-1$.) Wir fassen diese Kurve als Ort der sie berührenden Linienelemente auf, deren Parameterdarstellung daher:

$$y^\alpha = y^\alpha[x^1(s), \ldots, x^{n-1}(s)] \tag{1'}$$

$$y'^\alpha = \varphi^\alpha_i(s)\, x'^i(s) \tag{1''}$$

$$\varphi^\alpha_i = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \tag{1'''}$$

ist. Die Verbindungsgrößen φ^α_i sind inbezug auf den Zeiger α kontravariante Vektoren des F_n, inbezug auf den Zeiger i kovariante Vektoren des F_{n-1}.

Zu jedem Linienelement der Kurve (1') gehört ein normiertes n-Bein (wenn wir die Kurve als eine Raumkurve betrachten). Diese

---

1) Teilergebnis einer Doktoratsarbeit bei der philosophischen Fakultät Debrecen.

2) Siehe z. B. CARTAN (1), FINSLER (1).

3) O. VARGA (2) S. 196.

Einheitsvektoren seien $\underset{(\beta)}{t^\alpha}$, für welche

(2a) $$\underset{(\gamma)}{t^\alpha}\underset{(\delta)}{t_\alpha}=\delta_{\gamma\beta}$$

(2b) $$\underset{(\gamma)}{t^\alpha}\underset{(\gamma)}{t_\beta}=\delta^\alpha_\beta$$

und

(3) $$\underset{(1)}{t^\alpha}=\frac{dy^\alpha}{ds}=\varphi^\alpha_i\frac{dx^i}{ds}$$

gelten.

Für die Vektoren $\underset{(\beta)}{t^\alpha}$ gelten die Frenetschen Formeln.[4]) Der (Raum-Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ sei wenigstens n-mal stetig differenzierbar)[5])

(4) $$\frac{D\underset{(\beta)}{t^\alpha}}{ds}=-\frac{\underset{(\beta-1)}{t^\alpha}}{\varrho_{\beta-1}}+\frac{\underset{(\beta+1)}{t^\alpha}}{\varrho_\beta},$$

wo

(5) $$\varrho_0^{-1}=\varrho_n^{-1}=0.$$

$\frac{1}{\varrho_\gamma}$ nennen wir γ-te Krümmung.

Faßen wir die Kurve als Hyperflächenkurve auf, so gilt die Parameterdarstellung:

(6) $$x^i=x^i(s).$$

Als Kurve einer $n-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit besitzt sie ein begleitendes $n-1$-Bein. Bezeichnen wir dieses mit $\underset{(\beta)}{k^i}$, dann gilt bekanntlich

(6a) $$\underset{(s)}{k^i}\underset{(s)}{k_l}=\delta^i_l$$

(6b) $$\underset{(s)}{k^i}\underset{(l)}{k_i}=\delta_{sl}.$$

Die Raumkomponenten der Vektoren $\underset{(s)}{k^i}$ sind

(7a) $$\underset{(1)}{k^\alpha}=\underset{(1)}{k^i}\varphi^\alpha_i=\underset{(1)}{t^\alpha}$$

und

(7b) $$\underset{(s)}{k^\alpha}=\underset{(s)}{k^i}\varphi^\alpha_i \qquad (s=2,3,\ldots,n-1).$$

Nehmen wir zu diesem begleitenden $n-1$-Bein noch den Normalvektor n^α des Linienelementes (x, x'). Dann bekommen wir ein zur Fläche gehörendes begleitendes n-Bein, $\underset{(\gamma)}{k^\alpha}$, wo

4) Duschek—Mayer (1) Bd. II. S. 62.

5) D bedeutet natührlich den im Finslerschen Raum definierten invarianten Differential-Operator. $Dv^\alpha=dv^\alpha+C^\alpha_{\beta\gamma}dy'^\gamma v^\beta+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}dy^\gamma v^\beta$. Siehe z. B. O. Varga (2) S. 194.

(8a)
$$\underset{(1)}{k^\alpha} = \underset{(1)}{t^\alpha}$$

(8b)
$$\underset{(n)}{k^\alpha} = n^\alpha.$$

Für die Vektoren $\underset{(s)}{k^i}$ gelten die folgenden Frenet-Formeln:

(9)
$$\frac{\mathfrak{D}\underset{(s)}{k^i}}{ds} = -\frac{\underset{(s-1)}{k^i}}{\mu_{s-1}} + \frac{\underset{(s+1)}{k^i}}{\mu_s},$$

wo

(9′)
$$\mu_0^{-1} = \mu_{n-1}^{-1} = 0.$$

$\mathfrak{D}$ ist das zur Hyperfläche gehörige invariante Differential, sein Zusammenhang mit dem Differential D wird durch

(9″)
$$\mathfrak{D}v^i = \varphi^i_\alpha D v^\alpha$$

bestimmt.[6])

Da die beiden n-Beine $\underset{(\beta)}{t^\alpha}$ und $\underset{(\beta)}{k^\alpha}$ aus linear unabhängigen Vektoren bestehen, können wir die Vektoren des einen n-Beines durch diejenigen des anderen linear kombinieren, d. h.

(10)
$$\underset{(\beta)}{k^\alpha} = c_{\beta\sigma} \underset{(\sigma)}{t^\alpha},$$

wo

(11)
$$c_{1\sigma} = \delta_{1\sigma}.$$

Aus (10) folgt

(12)
$$c_{\beta\sigma} = \underset{(\beta)}{k^\alpha} \underset{(\sigma)}{t_\alpha} = \cos(\underset{(\beta)}{k}\ \underset{(\sigma)}{t}).$$

Venden wir auf (10) den $\frac{D}{ds}$ Operator an, so bekommen wir

(13)
$$\frac{D\underset{(\beta)}{k^\alpha}}{ds} = c_{\beta\sigma}\frac{D\underset{(\sigma)}{t^\alpha}}{ds} + \underset{(\sigma)}{t^\alpha}\frac{dc_{\beta\sigma}}{ds}.$$

Aus (4) und (13) folgt

(14)
$$\frac{D\underset{(\beta)}{k^\alpha}}{ds} = -\frac{c_{\beta\sigma}}{\varrho_{\sigma-1}}\underset{(\sigma-1)}{t^\alpha} + \frac{c_{\beta\sigma}}{\varrho_\sigma}\underset{(\sigma)}{t^\alpha} + \frac{dc_{\beta\sigma}}{ds}\underset{(\sigma)}{t^\alpha}.$$

Wegen der Ortogonalität der Matrix $\|c_{\beta\sigma}\|$ erhält man als Umkehrung von (10)

(15)
$$\underset{(\sigma)}{t^\alpha} = c_{\beta\sigma}\underset{(\beta)}{k^\alpha}.$$

Aus (15) und (13) erhält man schließlich

(16)
$$\boxed{\frac{D\underset{(\beta)}{k^\alpha}}{ds} = \left\{-\frac{c_{\beta\sigma}c_{\gamma\sigma-1}}{\varrho_{\sigma-1}} + \frac{c_{\beta\sigma}c_{\gamma\sigma+1}}{\varrho_\sigma} + c_{\gamma\sigma}\frac{dc_{\beta\sigma}}{ds}\right\}.\underset{(\gamma)}{k^\alpha}}$$

[6]) Siehe O. Varga (2) S. 199.

Überschieben wir die aus (9″) folgenden Relationen

$$\frac{\mathfrak{D}\underset{(s)}{k^i}}{ds} = \varphi^i_s \frac{D\underset{(s)}{k^\beta}}{ds} \tag{17}$$

mit φ^α_i, so wird wegen[7])

$$\varphi^i_\beta \varphi^\alpha_i = \delta^\alpha_\beta - n^\alpha n_\beta$$

$$\varphi^\alpha_i \frac{\mathfrak{D}\underset{(s)}{k^i}}{ds} = \delta^\alpha_\beta \frac{D\underset{(s)}{k^\beta}}{ds} - n^\alpha \left\{ n_\beta \frac{D\underset{(s)}{k^\beta}}{ds} \right\} \tag{18}$$

d. h.

$$\frac{D\underset{(s)}{k^\alpha}}{ds} = \varphi^\alpha_i \frac{\mathfrak{D}\underset{(s)}{k^i}}{ds} + n^\alpha \left\{ n_\beta \frac{D\underset{(s)}{k^\beta}}{ds} \right\}. \tag{19}$$

Die in (19) auftretenden Invarianten bezeichnen wir mit

$$n_\beta \frac{D\underset{(s)}{k^\beta}}{ds} = N_s. \tag{20}$$

Aus (31) wird folgen, daß N_1 die Normalkrümmung der gegebenen Fläche ist.

Aus (9) enthalten wir unter Beachtung von (6a), (6b) und (20):

$$\boxed{\frac{D\underset{(s)}{k^\alpha}}{ds} = -\frac{\underset{(s-1)}{k^\alpha}}{\mu_{s-1}} + \frac{\underset{(s+1)}{k^\alpha}}{\mu_s} + N_s n^\alpha} \tag{21}$$

Vergleich von (16) und (21) ergibt folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{c_{22}}{\varrho_1} \tag{22}$$

$$\frac{1}{\mu_i} = \frac{-c_{i\sigma} c_{i+1\,\sigma-1} + c_{i\sigma-1} c_{i+1\,\sigma}}{\varrho_{\sigma-1}} \tag{23}$$

($i = 2, 3, \ldots, n-2$, $\sigma = 3, 4, \ldots, n-1$. Nicht summieren über i!)

$$N_1 = \frac{c_{n2}}{\varrho_1} = \frac{\cos\varphi_{n2}}{\varrho_i}, \tag{24}$$

wo

$$\cos\varphi_{n2} = c_{n2}$$

$$N_s = \frac{1}{\lambda_s} - \sin\varphi_{s\sigma} \cos\varphi_{n\sigma} \frac{d\varphi_{s\sigma}}{ds} \tag{25}$$

(nicht summieren über s!)

wo

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{c_{i\sigma} c_{n\sigma+1} - c_{i\sigma+1} c_{n\sigma}}{\varrho_\sigma} \tag{26}$$

($i = 2, 3, \ldots, n-1$, $\sigma = 2, 3, \ldots, n-1$. Nicht summieren über i!),

[7]) Siehe O. Varga (2) S. 194.

und wegen (11)

(26′) $$\frac{1}{\lambda_1}=0.$$

Der Zähler der rechten Seite der Gleichungen (23) ist nichts anders, als der cosinus des Winkels zweier Ebenen $(\underset{(i)}{k}, \underset{(i+1)}{k})$ und $(\underset{(\sigma)}{t}, \underset{(\sigma+1)}{t})$. Ebenso ist der Zähler der rechten Seite von (26) der cosinus des Winkels zweier Ebenen $(\underset{(i)}{k}\,\underset{(n)}{k})$ und $(\underset{(\sigma)}{t}\,\underset{(\sigma+1)}{t})$.[8] Bezeichnen wir diese mit $\cos\varphi^{\sigma\sigma+1}_{i\,i+1}$, bezihungsweise $\cos\varphi^{\sigma\sigma+1}_{in}$, so können wir die Formeln (22)—(26′) folgendermassen darstellen:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
(27) & \dfrac{1}{\mu_1}=\dfrac{c_{22}}{\varrho_1} \\
(28) & \dfrac{1}{\mu_i}=\dfrac{\cos\varphi^{23}_{i\,i+1}}{\varrho_2}+\ldots+\dfrac{\cos\varphi^{n-1\,n}_{i\,i+1}}{\varrho_{n-1}} \\
(29) & \dfrac{1}{\lambda_1}=0 \\
(30) & \dfrac{1}{\lambda_i}=\dfrac{\cos\varphi^{23}_{in}}{\varrho_1}+\ldots+\dfrac{\cos\varphi^{n-1\,n}_{in}}{\varrho_{n-1}} \\
 & \text{(nicht summieren über } i!)
\end{array}}$$

Wegen (20) und der Orthogonalität von n^β und $\underset{(s)}{k^\beta}$ ist[9])

(31) $$N_l=b_{ir}l^i l^r=b_{00}$$

(32) $$N_s=b_{ir}\underset{(s)}{k^i}l^r+a_{ir}\frac{\omega^r(d)}{ds}\underset{(s)}{k^i}.$$[10])

Da die Koefficienten von (21) schiefsymmetrisch sind, können wir die Formeln (21) folgendermaßen darstellen:

(32) $$\boxed{\begin{array}{l}
\dfrac{D\underset{(1)}{k^\alpha}}{ds}=\ast+\dfrac{\underset{(2)}{k^\alpha}}{\mu_1}+\ast+N_1 n^\alpha \\
\dfrac{D\underset{(2)}{k^\alpha}}{ds}=-\dfrac{\underset{(1)}{k^\alpha}}{\mu_1}+\ast+\dfrac{\underset{(3)}{k^\alpha}}{\mu_2}+\ast+N_2 n^\alpha \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\dfrac{D\underset{(n-1)}{k^\alpha}}{ds}=\ast-\dfrac{\underset{(n-2)}{k^\alpha}}{\mu_{n-2}}+\ast+N_{n-1}n^\alpha \\
\dfrac{D\underset{(n)}{k^\alpha}}{ds}=-N_1\underset{(1)}{k^\alpha}-N_2\underset{(2)}{k^\alpha}-\ldots-N_{n-2}\underset{(n-2)}{k^\alpha}-N_{n-1}\underset{(n-1)}{k^\alpha}+\ast
\end{array}}$$

8) Siehe etwa B. Segre: Encykl. d. math. Wiss. III. insb. S. 801.

9) b_{ik} ist der zweite Fundamentaltensor des F_{n-1}, l^i ist der Einheitsvektor, der die Richtung seines Linienelementes hat, ferner N_1 die Normalkrümmung.

10) Siehe O. Varga (2), insbes. S. 209.

Die (25), (27)—(30) und (32) sind die verallgemeinerten Darbouxschen Formeln.

Ein Linienelement für welches $N_1 = 0$, bezeichnen wir als asymptotisches Linienelement . Wenn alle Linienelemente einer Kurve asymptotisch sind, ist die ganze Kurve eine Asymptotenlinie. Aus (24) folgt, daß auch hier der Satz gilt, daß die Schmiegebene der Asymptotenlinien mit der Tangentenebene zusammenfällt.

Es ist bekannt, daß bei den Raumgeodetischen $\varrho_1^{-1} = 0$, bei den Flächengeodetischen $\mu_1^{-1} = 0$. Aus (26) folgt, daß die Raumgeodetische immer Flächengeodetische ist, das Umgekehrte aber nicht immer gilt. Es ist nähmlich auch eine solche Kurve flächengeodetisch, bei welcher $\varrho_1^{-1} \neq 0$, aber $c_{22} = 0$. Daraus folgt, daß eine Schmiegebene der flächengeodetischen Kurve zu der Tangentenebene orthogonal ist, als Verallgemeinerung des im euklidischen Raume bekannten Satzes.

Aus (3) und (10) folgt[11])

$$(33) \qquad \frac{1}{\varrho_1} \underset{(2)}{t}^{\alpha} = \varphi_i^{\alpha} \underset{(2)}{k}^{i} \frac{1}{\mu_i} + c_i^{\alpha} \frac{dx^i}{ds}.$$

Aus (33) folgt, daß eine flächliche geodetische Linie dann und nur dann raumgeodetische Linie ist, wenn der Rang der Matrix $\|c_i^{\alpha}\|$ kleiner als $n-1$ ist.

F_{n-1} ist in einem Punkte geodetisch, wenn alle zu jedem Linienelement der Berührungsebene gehörenden Flächengeodetischen gleichzeitig auch Raumgeodetische sind. Aus (33) folgt, daß dazu notwendig und hinreichend

$$(34) \qquad c_i^{\alpha} = 0.$$

ist.

Aus (33) bekommen wir durch eine einfache Rechnung

$$(35) \qquad \frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\mu_1^2} + c_{\alpha 0} c_0^{\alpha}.$$

Aus (35) folgt, daß

$$(36) \qquad \left|\frac{1}{\varrho_1}\right| \geqq \left|\frac{1}{\mu_1}\right|$$

ebenso, wie im Riemannschen Raum.[12]) ϱ_1^{-1} ist dort am kleinsten, wo $\mu_1^{-1} = 0$.

[11]) Siehe die verallgemeinerten Gaußschen und Weingartenschen Ableitungsgleichungen, O. VARGA (2) S. 209.

[12]) DUSCHEK—MAYER (1) Bd. II. S. 159.

Schriftenverzeichnis.

L. Berwald: (1) Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. *Mh. Math. Physik*, 43, S. 1—14.

E. Cartan: (1) Leçons sur les invariants intégraux. Paris, Hermann et Cie. 1922.
(2) Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, Gauthier-Villars, 1928.
(3) Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles* 79. Paris, Hermann et Cie. 1934.

A. Duschek— W. Mayer: (1) Lehrbuch der Differentialgeometrie. Bd. I—II. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

F. Finsler: (1) Über Kurven und Flächen im allgemeinen Raum. Diss. Göttingen, 1918.

J. A. Schouten: (1) Der Ricci-Kalkül. Berlin, J. Springer, 1924.

O. Varga: (1) Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, Tom. XI. S. 149—163.
(2) Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen. *Deutsche Mathematik*, Jahrg. 6, S. 192—212.
(3) Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 19, S. 367– 380.

Funktionensysteme mit vertauschbaren Gramschen Matrizen.

Von BÉLA GYIRES in Debrecen.

Im folgenden soll ein Problem behandelt werden, das bei der linearen Approximation von Funktionen durch gewiße Funktionensysteme von Wichtigkeit ist.

Ist

$$\mathfrak{F}=\begin{pmatrix}(f_1 f_1)\dots(f_1 f_m)\\ \cdot\quad\dots\quad\cdot\\ (f_m f_1)\dots(f_m f_m)\end{pmatrix}$$

die Gramsche Matrix der in einem Intervall $<\alpha, \beta>$ definierten, stetigen, reellen und linear unabhängigen Funktionen

$$f_1(x),\dots,f_m(x), \tag{1}$$

wobei

$$(f_i f_k)=\int_\alpha^\beta f_i(x) f_k(x)\,dx \qquad (i, k=1,\dots,m),$$

dann sind $|\mathfrak{F}|$ und seine sämtlichen Hauptminoren positiv. Matrix $\mathfrak{F}$ kann daher als eine zu einer regulären, positiv definiten quadratischen Form gehörige Matrix aufgefaßt werden.

Da das Funktionensystem (1) mit einem aus m Funktionen bestehenden normierten orthogonalen Funktionensystem

$$\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)$$

aequivalent ist, kann die Matrix $\mathfrak{F}$ auch als Matrixprodukt

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1'$$

geschrieben werden, wenn

$$f_i(x)\equiv\varphi_{i1}\varphi_1(x)+\dots+\varphi_{im}\varphi_m(x)$$
$$(i=1,\dots,m)$$

und

$$\mathfrak{F}_1=\begin{pmatrix}\varphi_{11}\dots\varphi_{1m}\\ \cdot\quad\dots\quad\cdot\\ \varphi_{m1}\dots\varphi_{mm}\end{pmatrix}.$$

Das zu lösende Problem besteht nun darin, jene im Intervall $\langle \alpha_g, \beta_g \rangle$ definierten, stetigen, linearunabhängigen, reellen Funktionensysteme

(2) $$g_1(x), \ldots, g_m(x)$$

zu bestimmen, deren Gramschen Matrizen $\mathfrak{G}$ mit der Gramschen Matrix des Funktionensystems (1) vertauschbar sind.

Da das System (2) denselben Bedingungen genügt, wie (1), müßen auch die Matrizen $\mathfrak{G}$ jene Eigenschaften besitzen, die für die Matrix $\mathfrak{F}$ oben erwähnt wurde. Wir müßen daher zunächst jene Matrizen $\mathfrak{G}$ bestimmen, die zu einer regulären, positiv definiten quadratischen Form gehören und mit einer zu einer ebenfalls regulären, positiv definiten quadratischen Form gehörigen Matrix $\mathfrak{F}$ vertauscht werden können.

Da $\mathfrak{F}$ reell und symmetrisch ist, so wird sie orthogonal aequivalent zu einer Diagonalmatrix Λ, vermöge der reellen, orthogonalen Matrix $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$, d. h. es gilt

(3) $$\mathfrak{F}\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}\Lambda.$$

Die Diagonalmatrix Λ ist dabei von der Form

$$\Lambda = (\lambda_1(1)_{\varrho_1}, \ldots, \lambda_\mu(1)_{\varrho_\mu}),$$
$$(\varrho_1 + \ldots + \varrho_\mu = m)$$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ die von einander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{F}$ sind und $\varrho_1, \ldots, \varrho_\mu$ ihre Multiplizität ist. Wegen der Voraussetzung über $\mathfrak{F}$ sind diese Wurzeln bekanntlich alle positiv.

Sämtliche mit $\mathfrak{F}$ vertauschbaren Matrizen sind durch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{D}\mathfrak{P}'_{\mathfrak{F}}$$

bestimmt, wobei in der Matrix

(4) $$\mathfrak{D} = (\mathfrak{M}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\varrho_\mu})$$

$\mathfrak{M}_{\varrho_i}$ $(i = 1, \ldots, \mu)$ eine beliebige Matrix der Ordnung ϱ_i ist.[1]) Wollen wir unter den Matrizen $\mathfrak{B}$ jene $\mathfrak{G}$ auswählen, die zu einer regulären, positiv definiten quadratischen Form gehören, so müßen wir nach dem Vorangehenden jene symmetrischen und reellen Matrizen auswählen, deren charakteristische Gleichung nur positive Wurzeln hat. Nachdem aber das charakteristische Polynom bei Ähnlichkeitstransformationen invariant ist. d. h.

$$|\mathfrak{B} - \lambda(1)_m| \equiv |\mathfrak{D} - \lambda(1)_m|,$$

so hat auch die Gleichung

$$|\mathfrak{D} - \lambda(1)_m| = 0$$

nur positive Wurzeln und weiters gilt wegen der Gestallt (4) von $\mathfrak{D}$

$$|\mathfrak{D} - \lambda(1)_m| \equiv |\mathfrak{M}_{\varrho_1} - \lambda(1)_{\varrho_1}| \ldots |\mathfrak{M}_{\varrho_\mu} - \lambda(1)_{\varrho_\mu}|.$$

---

[1]) B. Gyires: Über vertauschbare Matrizen. — Erscheint demnächst in den *Acta Szeged.*

Hieraus folgt, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Matrix $\mathfrak{M}_{\varrho_i}$ $(i=1,\ldots,\mu)$ alle positiv sind, d. h. die $\mathfrak{M}_{\varrho_i}$ müßen Matrizen irgendeiner regulären, positiv definiten quadratischen Form von ϱ Variabeln sein. Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn wenn die zur charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{M}_{\varrho_i}$ gehörenden Wurzel positiv sind, so gilt dasselbe auch von der zu $\mathfrak{B}$ gehörenden charakteristischen Gleichung, voraus folgt, daß $\mathfrak{B}$ eine zu einer regulären, positiv definiten quadratischen Form gehörende Matrix ist.

Wenn wir nun die Matrizen $\mathfrak{M}_{\varrho_i}$ dementsprechend wählen, so gibt es reelle, orthogonale Matrizen $\mathfrak{P}_{\varrho_i}$ so, daß

$$\mathfrak{M}_{\varrho_i}=\mathfrak{P}_{\varrho_i}\Lambda_{\varrho_i}\mathfrak{P}'_{\varrho_i} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

und Λ_{ϱ_i} eine zu $\mathfrak{M}_{\varrho_i}$ gehörende Diagonalmatrix ist. Daher ist:

$$\mathfrak{D}=(\mathfrak{P}_{\varrho_1},\ldots,\mathfrak{P}_{\varrho_\mu})(\Lambda_{\varrho_1},\ldots,\Lambda_{\varrho_\mu})(\mathfrak{P}_{\varrho_1},\ldots,\mathfrak{P}_{\varrho_\mu})'$$

und nachdem wir innerhalb der Matrizen Λ_{ϱ_i} die Wurzeln frei wählen können, folgt

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{P}_{\varrho_1},\ldots,\mathfrak{P}_{\varrho_\mu})(l_1,\ldots,l_m)(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{P}_{\varrho_1},\ldots,\mathfrak{P}_{\varrho_\mu}))', \tag{5}$$

wobei $l_1,\ldots,l_m$ beliebige positive Zahlen sind.

Unsere nächste Aufgabe ist die Bildung aller jener Funktionensysteme (2), welche zu den Matrizen $\mathfrak{G}$ gehören. Zu diesem Zwecke gehen wir von einem beliebigen, im Intervall $\langle\alpha_y,\beta_y\rangle$ definierten, stetigen und normierten orthogonalen System

$$\gamma_1(x),\ldots,\gamma_m(x) \tag{6}$$

aus und bestimmen jene durch (6) linear ausdrückbaren Funktionensysteme, deren Gramsche Matrizen $\mathfrak{G}$ in der Form

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_1' \tag{7}$$

darstellbar sind. Die Gesamtheit der in Form (7) darstellbaren Matrizen $\mathfrak{G}$ ist durch

$$\mathfrak{G}_1=\mathfrak{P}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathfrak{O}$$

gegeben[2]). Dabei ist $\mathfrak{P}$ diejenige Matrix, die die orthogonale Aequivalenz von $\mathfrak{G}$ mit der Diagonalmatrix Λ herbeiführt, und $\mathfrak{O}$ eine beliebige orthogonale Matrix. Wegen der Willkürlichkeit der $l_1,\ldots,l_m$ folgt hieraus und aus (5):

$$\mathfrak{G}_1=\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{P}_{\varrho_1},\ldots,\mathfrak{P}_{\varrho_\mu})(k_1,\ldots,k_m)\mathfrak{O}, \tag{8}$$

wobei $k_1,\ldots,k_m$ ebenfalls beliebige positive Zahlen sind.

---

[2]) B. Gyires: Darstellung symmetrischer regulärer Matrizen als Produkt von zueinander transponierten Matrizen. *Hungarica Acta Mathematica*, Bd. I., Nr. 4. S. 33—35.

Wenn nun

$$\mathfrak{G}_1 = (\gamma_{ik}),$$

so gibt

$$g_i(x) \equiv \gamma_{i1}\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_{im}\gamma_m(x)$$
$$(i = 1, \ldots, m)$$

die gesuchten Funktionensysteme.

Nun geben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, daß unter den Matrizen (8) zwei gleich sind.

Es seien

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{P}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{P}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\varrho_\mu})\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{O},$$
$$\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{P}_{\mathfrak{z}}(\overline{\mathfrak{P}}_{\varrho_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_{\varrho_\mu})\,\overline{\mathfrak{k}}\,\overline{\mathfrak{O}}$$

zwei Matrizen unter den Matrizen (8), wobei

$$\mathfrak{k} = (k_1, \ldots, k_m),\ \overline{\mathfrak{k}} = (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_m).$$

Setzen wir voraus, daß

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2, \tag{9}$$

dann folgt wegen der Regularität von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{z}}$

$$(\mathfrak{P}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\varrho_\mu})\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{O} = \overline{\mathfrak{P}}_{\varrho_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_{\varrho_\mu})\,\overline{\mathfrak{k}}\,\overline{\mathfrak{O}},$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{k}\,\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{V}}\,\overline{\mathfrak{k}}, \tag{10}$$

wenn

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{O}\overline{\mathfrak{O}}',\ \overline{\mathfrak{V}} = (\mathfrak{P}'_{\varrho_1}\overline{\mathfrak{P}}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{P}'_{\varrho_\mu}\overline{\mathfrak{P}}_{\varrho_\mu}) \tag{11}$$

orthogonale Matrizen sind. Aus (10) folgt

$$\overline{\mathfrak{V}}' = \overline{\mathfrak{k}}^{-1}\mathfrak{V}'\mathfrak{k} = \overline{\mathfrak{V}}^{-1} = \overline{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{k}^{-1},$$

d. h.

$$\mathfrak{V}'\mathfrak{k}^2 = \overline{\mathfrak{k}}^2\mathfrak{V}'$$

und daher

$$\mathfrak{k}^2\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\overline{\mathfrak{k}}^2. \tag{12}$$

Entsprechend

$$\mathfrak{k}^2\overline{\mathfrak{V}} = \overline{\mathfrak{V}}\,\overline{\mathfrak{k}}^2. \tag{13}$$

Nachdem das charakteristische Polynom einer Matrix eine Orthogonalinvariante ist, müßen auf Grund von (12) und (13) die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Matrizen $\mathfrak{k}^2$ und $\overline{\mathfrak{k}}^2$ gleich sein, und da diese Wurzeln gerade die Diagonalelemente der beiden Matrizen liefern, sind die Elemente der Diagonalen gleich und können sich in beiden höchstens in der Reihenfolge unterscheiden. Daher ist

$$\mathfrak{k}^2\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\,\overline{\mathfrak{k}}^2, \tag{14}$$

wo $\mathfrak{C}$ eine aus dem Produkt der Commutatormatrizen bestehende orthogonale Matrix ist. Nachdem weiters $\mathfrak{k}$ und $\bar{\mathfrak{k}}$ gleichfalls Diagonalmatrizen mit positiven Diagonalelement sind, folgt daher

$$\mathfrak{k}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{k}}, \tag{15}$$

dies bedeutet, daß $\bar{\mathfrak{k}}$ aus $\mathfrak{k}$ durch Permutation der Diagonalelemente entsteht.

Auf grund von (12), (13) und (14) sind $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ reelle orthogonale Matrizen, die die orthogonale Aequivalenz von $\mathfrak{k}^2$ mit $\bar{\mathfrak{k}}^2$ herbeiführen. Daher ist[1])

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}, \quad \bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{D}}, \tag{16}$$

wo $\mathfrak{D}$ und $\bar{\mathfrak{D}}$ mit $\bar{\mathfrak{k}}^2$ vertauschbare, reelle, orthogonale Matrizen sind. Da aber die Diagonalelemente von $\bar{\mathfrak{k}}$ mit den positiven Quadratwurzeln der entsprechenden Diagonalelemente von $\bar{\mathfrak{k}}^2$ gleich sind, ist $\mathfrak{D}$ und $\bar{\mathfrak{D}}$ auch mit $\bar{\mathfrak{k}}$ vertauschbar[1]). Daraus folgt, daß $\mathfrak{B}$, $\bar{\mathfrak{B}}$ und — auf Grund von (15) — $\mathfrak{C}$ die orthogonale Aequivalenz von $\mathfrak{k}$ mit $\bar{\mathfrak{k}}$ herbeiführt. Substituieren wir die Ausdrücke (15) und (16) in (10) und beachten, daß $\bar{\mathfrak{D}}$ ind $\bar{\mathfrak{k}}$ vertauschbar sind, so erhalten wir

$$\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}.$$

Mit Rücksicht darauf, entsteht aus (11)

$$\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}, \quad (\bar{\mathfrak{P}}_{\varrho_1}, \ldots, \bar{\mathfrak{P}}_{\varrho_\mu}) = (\mathfrak{P}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\varrho_\mu})\,\mathfrak{C}\mathfrak{D}. \tag{17}$$

Nachdem die Inverse einer regulären Matrix von Typus (4) vom gleichen Typus ist, folgt, daß auch $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ eine reelle, orthogonale Matrix dieser Gestallt ist. Daraus folgt, daß

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}'(\mathfrak{P}^*_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{P}^*_{\varrho_\mu}) \tag{18}$$

ist und die $\mathfrak{P}^*_{\varrho_i}$ $(i = 1, \ldots, \mu)$ reelle orthogonale Matrizen sind.

Die Relationen (15), (17) und (18) bilden die notwendige Bedingung für das Bestehen von (9). Daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, ergibt sich folgendermaßen: Substituieren wir (17) in $\mathfrak{G}_2$ und beachten, daß $\bar{\mathfrak{k}}$ und $\mathfrak{D}$ vertauschbar sind und daß weiters auf Grund von (15) $\mathfrak{k}$ an Stelle von $\bar{\mathfrak{k}}$ gesetzt werden kann, so gelangen wir zu $\mathfrak{G}_1$.

Darstellung symmetrischer regulärer Matrizen als Produkt von zueinander transponierten Matrizen.

Von BÉLA GYIRES in Debrecen.

In der vorliegenden Arbeit werden quadratische Matrizen betrachtet, die in demjenigen Sinne als regulär bezeichnet werden, daß ihre zugehörige Determinante von Null verschieden ist. Im Falle einer regulären Matrix können wir sämtliche Matrizen angeben, die das gestellte Problem lösen. Es stellt sich dabei heraus, daß das Wesentliche die Bestimmung einer Lösung ist, aus welcher man dann sämtliche übrigen Lösungen durch eine leichte Überlegung finden kann.

1. Wenn $\mathfrak{A}$ eine beliebige symmetrische reguläre Matrix ist, für die eine Matrix $\mathfrak{J}$ so existiert, daß

(1) $$\mathfrak{J}\mathfrak{J}' = \mathfrak{A},$$

dann wird auch

(2) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}',$$

wobei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Matrix aus der Schar

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{J}\mathfrak{O}$$

ist, mit beliebiger orthogonaler Matrix $\mathfrak{O}$. Durch $\mathfrak{M}$ sind sämtliche Lösungen von (2) bestimmt.

Beweis: Auf Grund von (1) und (2) gilt

$$\mathfrak{J}\mathfrak{J}' = \mathfrak{M}\mathfrak{M}'$$

und daraus

$$(\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M})(\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M})' = (1)_m,$$

was schon in

$$\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{O}$$

die erste Hälfte unsere Behauptung ist. Anderseits wird, wenn $\mathfrak{J}$ (1) genügt und $\mathfrak{O}$ eine beliebige orthogonale Matrix ist

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}' = \mathfrak{J}\mathfrak{O}\mathfrak{O}'\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}\mathfrak{J}' = \mathfrak{A},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

2. Wir können leicht eine Lösung $\mathfrak{Z}$ von (1) angeben. Jede reguläre symmetrische Matrix besitzt nämlich eine Quadratwurzel, die ebenfalls symmetrisch ist. Ist nämlich $\mathfrak{A}$ regulär, dann existiert immer ein Polynom $\chi(\lambda)$ von kleinerem Grade, als die Ordnung m von $\mathfrak{A}$, so daß aus

$$\mathfrak{B} = \chi(\mathfrak{A})$$

die Relation

$$\mathfrak{B}^2 = \chi(\mathfrak{A})^2 = \mathfrak{A}$$

folgt[1]). Ist $\mathfrak{A}$ symmetrisch, dann gilt dies auch von $\mathfrak{B}$. Denn ist

$$\mathfrak{B}' = (\chi(\mathfrak{A}))' = \chi(\mathfrak{A}') = \chi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}.$$

Es gilt aber auch umgekehrt, daß jene Matrix, deren Quadratwurzel symmetrisch ist, selbst symmetrisch ist. In der Tat hat man für die symmetrische Matrix $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{A}' = (\mathfrak{B}^2)' = (\mathfrak{B}')^2 = \mathfrak{A}.$$

Ist

$$\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_m)$$

insbesondere eine reguläre Diagonalmatrix, dann ist eine Quadratwurzel

$$\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} = (+\sqrt{a_1}, \ldots, +\sqrt{a_m})$$

und daher wird die Bedingung

$$(a_1, \ldots, a_m) = \mathfrak{M}\mathfrak{M}'$$

durch die Matrizenschar

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{O} \tag{3}$$

befriedigt.

3. Wir beweisen nun: Ist $\mathfrak{A}$ eine reelle Matrix, zu der es — wie bekannt ist — eine orthogonalaequivalente Diagonalmatrix Λ gibt, dann wird die Relation (2) durch

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathfrak{O} \tag{4}$$

befriedigt. Dabei ist $\mathfrak{P}$ diejenige orthogonale Matrix, die die Aequivalenz

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \Lambda \tag{5}$$

herbeiführt und daher Λ bekanntlich diejenige Diagonalmatrix

$$\Lambda = (\lambda_1(1)_{\varrho_1}, \ldots, \lambda_\mu(1)_{\varrho_\mu}),$$

deren Elemente die in entsprechender Vielfachheit genommenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{A}$ sind und $\mathfrak{O}$ eine beliebige orthogonale Matrix ist.

B e w e i s: Ist $\bar{\Lambda}$ diejenige Diagonalmatrix, die durch Permutation der Elemente von Λ entsteht, dann existiert immer eine Matrix $\bar{\mathfrak{P}}$, ver-

---

[1]) Bôcher: Einführung in die höhere Algebra. 1925. p. 320–322.

möge der $\mathfrak{A}$ und $\bar{\Lambda}$ orthogonal aequivalent werden. Denn es besteht zwischen Λ und $\bar{\Lambda}$ die Beziehung

$$\bar{\Lambda} = \mathfrak{C}'\Lambda\mathfrak{C}, \tag{6}$$

in der $\mathfrak{C}$ eine orthogonale Matrix ist. Unsere Behauptung folgt dann aus (5) und (6).

Die Diagonalmatrix Λ können wir wegen (3) auf die Produktgestallt

$$\Lambda = \mathfrak{G}\mathfrak{G}' \tag{7}$$

bringen. (Wir haben jetzt die Matrix $\mathfrak{M}$ von (3) mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet.) Aus (5) und (7) folgt nun, wenn

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\mathfrak{G}$$

gesetzt wird, unsere Behauptung mit einem $\mathfrak{M}$ von der Form (4).

4. Bemerkung: Ist $\mathfrak{P}$ eine (5) befriedigende Matrix, dann erhält man sämtliche derartige Matrizen durch

$$\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}\mathfrak{D}$$

wo $\mathfrak{D}$ eine mit Λ vertauschbare reguläre Matrix ist[2]). Daraus folgt, daß $\bar{\mathfrak{P}}$ dann und nur dann orthogonal ist, wenn dies für $\mathfrak{D}$ gilt. Für die gilt nun weiter, daß es die Gestallt

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{M}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\varrho_\mu})$$

hat, wobei die Ordnung einer Matrix $\mathfrak{M}_{\varrho_k}$ mit der Multiplizität der Wurzel λ_k übereinstimmt[2]). Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{D}$ dann und nur dann orthogonal ist, wenn dies für die $\mathfrak{M}_{\varrho_k}$ gilt. Dies folgt aus

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}' = (\mathfrak{M}_{\varrho_1}\mathfrak{M}'_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\varrho_\mu}\mathfrak{M}'_{\varrho_\mu}) = (1)_m.$$

Ist beispielweise $\varrho_1 = \ldots = \varrho_m = 1$, dann muß $d_{11}^2 = d_{22}^2 = \ldots = d_{mm} = 1$ sein, wenn $d_{11}, \ldots, d_{mm}$ die Elemente der Diagonal sind. Daraus folgt, daß es in diesem Falle 2^m-ten derartige Matrizen gibt,

[2]) B. Gyires: Über vertauschbare Matrizen. Erscheint demnächst in den *Acta Szeged.*

CONTENTS.